Integration dieser Differentialgleichung $dy + yydx = \frac{Adx}{(a+bx+cxx)^2}$*

Leonhard Euler

§1 Aus der Form dieser Gleichung ist sofort klar, wenn sie ein rationales Integral hat, dass es notwendigerweise diese Gestalt haben muss

$$y = \frac{v}{a + 2bx + cxx},$$

das Differential welcher Formel

$$dy = \frac{dv(a + 2bx + cxx) - 2vdx(b + cx)}{(a + 2bx + cxx)^2}$$

ist. Daher entsteht also nach Wegschaffen des Nenners diese Gleichung

$$dv(a + 2bx + cxx) - 2vdx(b + cx) + vvdx = Adx.$$

Man sucht also, was für eine Größe für v angenommen werden muss, dass dieser Gleichung genügt wird.

*Originaltitel: „Integratio aequationis differentialis huius $dy + yydx = (Adx)/(a + 2bx + cxx)^2$", erstmals publiziert in „*Memoires de l'academie des sciences de St.-Petersbourg* 3, 1811, pp. 3-15", Nachdruck in „*Opera Omnia*: Series 1, Volume 23, pp. 379 - 392", Eneström-Nummer E734, übersetzt von: Alexander Aycock, Textsatz: Artur Diener, im Rahmen des Projektes „Euler-Kreis Mainz"

§2 Darum sieht man wiederum leicht ein, dass dieser Wert von v keine andere Form haben kann außer

$$v = f + 2gx + hx^2,$$

und weil daher

$$\mathrm{d}v = 2dx(g + hx)$$

ist, wird nach Substitution und Teilung durch dx diese Gleichung resultieren:

$$\left.\begin{array}{cccccccccc} hhx^4 & + & 4ghx^3 & + & 2bhxx & + & 2ahx & + & 2ag \\ & & & - & 2cgxx & - & 2cfx & - & 2bf \\ & & & + & 2fhxx & + & 4fgx & + & ff \\ & & & + & 4ggxx & & & & \end{array}\right\} = A$$

Damit nun diese Gleichung die identische wird, ist es nötig, dass sich die einzelnen Potenzen von x einzeln aufheben; daher muss für das Aufheben der vierten Potenz $h = 0$ sein, und auf diese Weise geht auch die dritte Potenz heraus, aber für das Wegschaffen der zweiten muss $4gg - 2cg = 0$ sein, woher $g = \frac{1}{2}c$ wird. Wenn weiter die mit der Größe x versehenen Terme 0 gesetzt werden, werden wir $4fg - 2cf = 0$ haben, woher $g = \frac{1}{2}c$ wird, welche Bedingung schon von selbst erfüllt worden ist, und so ist nur übrig, dass $ff + 2ag - 2bf = A$ wird; daher, weil $g = \frac{1}{2}c$ ist, muss $ff + cc - 2bf = A$ gesetzt werden, woher die Größe f auf zweifache Weise bestimmt wird; es wird nämlich $f = b \pm \sqrt{bb - ac + A}$ sein.

§3 Um nun die vorgelegte Gleichung gefälliger zu machen, wollen wir k anstelle von $\sqrt{bb - ac + A}$ schreiben, dass $A = kk - bb + ac$ wird, und so wird unsere zu integrierende Gleichung diese Form haben

$$\mathrm{d}y + yy\mathrm{d}x = \frac{(kk - bb + ac)\mathrm{d}x}{(a + 2bx + cxx)^2};$$

und daher sehen wir nun, dass dieser Wert dieser Gleichung genügt

$$y = \frac{b \pm k + cx}{a + 2bx + cxx},$$

sodass wir zwei Werte erhalten haben, die unserer Gleichung genügen, wegen des doppeldeutigen Vorzeichens vor dem Buchstaben k, welche Werte aber nicht reell sein werden, außer wenn k reell war, das heißt, außer wenn $bb - ac + A$ eine positive Größe war. Hier ist aber festzuhalten, dass in diesen beiden Formen keinesfalls das vollständige Integral der vorgelegten Gleichung enthalten ist, deshalb weil hier keine neue beliebige Konstante eingeführt worden ist, sodass diese Integration nur für partikuläre zu halten ist. Aber die vorgelegte Gleichung ist so beschaffen, dass aus einem beliebigen partikulären Integral nicht das vollständige gefunden werden kann, was, wie es gemacht werden muss, förderlich sein wird, es in der um Vieles allgemeineren Gleichung

$$\mathrm{d}y + yy\mathrm{d}x = V\mathrm{d}x$$

gezeigt zu haben, wo V irgendeine Funktion von x bezeichne, welcher dieser partikuläre Wert $y = p$ zu genügen gefunden worden sei, so dass diese Gleichung $\mathrm{d}p + pp\mathrm{d}x = V\mathrm{d}x$ die identische ist und nun aus diesem Wert $y = p$ das vollständige Integral gefunden werden muss.

§4 Für dieses Ziel wollen wir festsetzen, dass das vollständige Integral $y = p + z$ ist, und nach der Substitution wird diese Gleichung entstehen

$$\mathrm{d}p + \mathrm{d}z + (pp + 2pz + zz)\mathrm{d}z = V\mathrm{d}x,$$

woher, wenn jene Gleichung abgezogen wird, diese zurückbleiben wird: $\mathrm{d}z + 2pz\mathrm{d}x + zz\mathrm{d}x = 0$, die für $z = \frac{1}{v}$ gesetzt in diese verwandelt wird $\mathrm{d}v - 2pv\mathrm{d}x = \mathrm{d}x$, die mit $e^{-2\int p\mathrm{d}x}$ multipliziert integrierbar wird, deren Integral natürlich

$$ve^{-2\int p\mathrm{d}x} = \int e^{-2\int p\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$$

sein wird, welches Integral eine beliebige Konstante involviert, sodass wir

$$v = e^{2\int p\mathrm{d}x}\int e^{-2\int p\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + Ce^{+2\int p\mathrm{d}x}$$

haben, nach Finden welches Wertes unser vollständiges Integral

$$y = p + \frac{1}{v}$$

sein wird.

§5 Wir wollen diese Gleichung auf unsere Gleichung

$$\mathrm{d}y + yy\mathrm{d}x = \frac{(kk - bb + ac)\mathrm{d}x}{(a + 2bx + cxx)^2}$$

anwenden, für welche wir das partikuläre Integral

$$y = p = \frac{b \pm k + cx}{a + 2bx + cxx}$$

gefunden haben, woraus

$$2p\mathrm{d}x = \frac{2(b \pm k + cx)\mathrm{d}x}{a + 2bx + cxx}$$

wird, deren Integration keine Schwierigkeit darstellt. Wir wollen also dieses Integral $\int 2p\mathrm{d}x = \ln q$ setzen, sodass

$$e^{-2\int p\mathrm{d}x} = e^{-\ln q} = \frac{1}{q} \quad \text{und} \quad e^{2\int p\mathrm{d}x} = q$$

wird und so wird das vollständige Integral nun

$$y = p + \frac{1}{q\int \frac{\mathrm{d}x}{q} + Cq}$$

sein.

§6 Weil wir aber zwei partikuläre Integrale erhalten haben, wegen des zweideutigen Vorzeichens der Größe k, findet man daher das vollständige Integral um Vieles leichter, was wir auch in der allgemeinen Gleichung $\mathrm{d}y + yy\mathrm{d}x = V\mathrm{d}x$ zeigen wollen, welche wir annehmen wollen zwei partikulären Integralen zu genügen, natürlich zuerst $y = p$ und zweitens $y = q$, sodass so

$$\mathrm{d}p + pp\mathrm{d}x = V\mathrm{d}x$$

wie

$$\mathrm{d}q + qq\mathrm{d}x = V\mathrm{d}x$$

ist; durch Abziehen jeder der beiden von der vorgelegten Gleichung werden also diese beiden Gleichungen entstehen

$$1^o.\ \mathrm{d}y - \mathrm{d}p + (yy - pp)\mathrm{d}x = 0$$

und

$$2^o.\ \mathrm{d}y - \mathrm{d}q + (yy - qq)\mathrm{d}x = 0,$$

woher man die beiden folgenden findet,

$$\frac{\mathrm{d}y - \mathrm{d}p}{y - p} + (y + p)\mathrm{d}x = 0$$

und

$$\frac{\mathrm{d}y - \mathrm{d}q}{y - q} + (y + q)\mathrm{d}x = 0,$$

von welchen diese von jener abgezogen

$$\frac{\mathrm{d}y - \mathrm{d}p}{y - p} - \frac{\mathrm{d}y - \mathrm{d}q}{y - q} = (p - q)\mathrm{d}x = 0$$

zurücklässt, deren Integral natürlich

$$\ln\frac{y - p}{y - q} + \int (p - q)\mathrm{d}x = C$$

ist; daher berechnet man ziemlich leicht das vollständige Integral.

§7 Weil nämlich für unsere Gleichung

$$\mathrm{d}y + yy\mathrm{d}x = \frac{(kk - bb + ac)\mathrm{d}x}{(a + 2bx + cxx)^2}$$

ist, wo aus dem Obigen klar ist, dass

$$p = \frac{b + k + cx}{a + 2bx + cxx} \quad \text{und} \quad q = \frac{b - k + cx}{a + 2bx + cxx}$$

ist, wird

$$p - q = \frac{2k}{a + 2bx + cxx}$$

sein; daher werden wird, wenn wir

$$\int \frac{2k\mathrm{d}x}{a + 2bx + cxx} = s$$

setzen,

$$\ln\frac{y - p}{y - q} + s = C$$

haben. Daher berechnen wir

$$\frac{y-p}{y-q} = \Delta e^{-s},$$

wo Δ eine beliebige Konstante bezeichnet, und daher folgert man weiter

$$y = \frac{\Delta q e^{-s} - p}{\Delta e^{-s} - 1} \quad \text{oder} \quad y = \frac{\Delta q - pe^{s}}{\Delta - e^{s}},$$

was also das vollständige Integral unserer Gleichung ist. Damit diese Interpretation klarer wird, wollen wir sie an einigen Beispielen illustrieren.

Beispiel 1 dieser Gleichung
$\mathrm{d}y + yy\mathrm{d}x = \frac{A\mathrm{d}x}{(1+xx)^2}$

§8 Hier ist also vor Allem $a = 1$, $b = 0$ und $c = 1$ und es wird $A = kk + 1$ sein, und daher $k = \sqrt{A-1}$; deswegen werden wir für die partikulären Integrale

$$s = 2\sqrt{A-1}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+xx} = 2\sqrt{A-1}\arctan x$$

haben, weiter ist aber

$$p = \frac{x+\sqrt{A-1}}{1+xx} \quad \text{und} \quad q = \frac{x-\sqrt{A-1}}{1+xx};$$

daher berechnet man das vollständige Integral

$$y = \frac{\Delta(x-\sqrt{A-1}) - e^{s}(x+\sqrt{A-1})}{(1+xx)(\Delta - e^{s})}.$$

§9 Um dies besser zu unserem Nutzen anzuwenden, wollen wir das Integral setzen so genommen werden zu müssen, dass es für $x = 0$ verschwindet; in diesem Fall wird $s = 0$ sein, woher die Konstante Δ so bestimmt werden muss, dass

$$0 = \frac{-\Delta\sqrt{A-1} - \sqrt{A-1}}{\Delta - 1}$$

wird, woher $\Delta = -1$ wird, und so wird

$$y = \frac{x-\sqrt{A-1} + \mathrm{e}^{s}(x+\sqrt{A-1})}{(1+xx)(1+\mathrm{e}^{s})}$$

sein, welcher Ausdruck immer reell sein wird, sooft $A-1$ eine positive Größe war.

§10 Weil aber dieses Integral immer reell sein muss, auch wenn $\sqrt{A-1}$ imaginär ist, ist zu zeigen, wie in diesen Fällen sich die imaginären Anteile gegenseitig aufheben. Damit aber diese Rechnung leichter erledigt werden kann, wollen wir setzen, dass $\sqrt{A-1} = \alpha\sqrt{-1}$ ist, dann sei aber der Kürze wegen $\arctan(x) = \varphi$, dass $x = \tan(\varphi)$ und $1 + xx = \frac{1}{\cos^2 \varphi}$ ist, und so wird unsere Gleichung

$$y = \frac{(\tan(\varphi) - \alpha\sqrt{-1} + e^{2\alpha\varphi\sqrt{-1}}(\tan\varphi + \alpha\sqrt{-1})\cos^2\varphi}{1 + e^{2\alpha\varphi\sqrt{-1}}}$$

sein.

§11 Weil hier überall imaginäre Einheiten auftauchen, und auch in den Exponenten, müssen sie da weggeschafft werden, was mit Hilfe der allgemeinen Formel

$$e^{\omega\sqrt{-1}} = \cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega$$

geschieht. In unserem Fall wird

$$e^{2\alpha\varphi\sqrt{-1}} = \cos(2\alpha\varphi) + \sqrt{-1}\sin 2\alpha\varphi$$

sein, wo wir der Kürze wegen anstelle von $2\alpha\varphi$ durchgehend ω schreiben wollen. Nach Einsetzen dieses Wertes wird der Zähler des gefundenen Bruches diese Form annehmen:

$$\tan\varphi - \alpha\sqrt{-1} + (\tan\varphi + \alpha\sqrt{-1})(\cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega)$$

oder diese

$$\tan(1 + \cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega) - \alpha\sqrt{-1}(1 - \cos\omega - \sqrt{-1}\sin\omega.$$

Wenn wir daher also beide mit $1 + \cos\omega - \sqrt{-1}\sin\omega$ multiplizieren, dass der Nenner gleich $2 + 2\cos\omega = 2(1 + \cos\omega)$ wird, der Zähler, nach Durchführung der Rechnung, wird $2\tan\varphi(1 + \cos\omega) - 2\alpha\sin\omega$ werden und auf diese Weise ist der Zähler wie der Nenner reell, weshalb unser Integral

$$y = \frac{\tan\varphi(1 + \cos\omega) - \alpha\sin\omega\cos^2(\varpi)}{1 + \cos\omega}$$

sein wird, in welchem Integral

$$\tan\varphi = x, \quad \alpha = -\sqrt{1-A}, \quad \omega = 2\alpha\varphi = -2\varphi\sqrt{1-A}$$

ist.

§12 Wann immer also in unserer vorgelegten Gleichung

$$\mathrm{d}y + yy\mathrm{d}x = \frac{A\mathrm{d}x}{(1+xx)^2}$$

$A = 1 - \alpha\alpha$ war, wird für $x = \tan\varphi$ gesetzt und für den Winkel $\omega = 2\alpha\varphi$ genommen

$$y = \frac{x(1+\cos\omega) - \alpha\sin\omega}{(1+xx)(1+\cos\omega)}$$

sein, welcher Ausdruck noch einfacher gemacht werden kann. Weil nämlich

$$\frac{\sin\omega}{1+\cos\omega} = \tan\frac{1}{2}\omega = \tan\alpha\varphi$$

ist, wird

$$y = \frac{x - \alpha\tan\alpha\varphi}{1+xx}$$

sein, welcher Wert für $x = 0$ gesetzt verschwindet.

BEISPIEL 2 DIESER GLEICHUNG $\mathrm{d}y + yy\mathrm{d}x = \frac{A\mathrm{d}x}{(1-xx)^2}$

§13 Hier ist also $a = 1$, $b = 0$ und $c = -1$; daher wird $A = kk - 1$ und daher $k = \sqrt{A+1}$, als logische Konsequenz

$$s = 2\sqrt{A+1}\int\frac{\mathrm{d}x}{1-xx} = \sqrt{A+1}\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

Daher wird also

$$e^s = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^k$$

sein, woher wegen

$$p = \frac{k-x}{1-xx} \quad \text{und} \quad q = \frac{-k-x}{1-xx}$$

unser Integral

$$y = \frac{\Delta q - p\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^k}{\Delta - \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^k}$$

werden wird oder

$$y = \frac{\Delta(k+x)(1-x)^k + (k-x)(1+x)^k}{(1-xx)((1+x)^k - \Delta(1-x)^k)}.$$

Damit wir diesen Ausdruck auf eine gefälligere Form bringen, wollen wir $\int \frac{\mathrm{d}x}{xx-1} = -\omega$ setzen, dass $s = 2k\omega$ wird und für das vollständige Integral haben wir

$$y = \frac{\Delta q - p\mathrm{e}^{2k\omega}}{\Delta - \mathrm{e}^{2k\omega}}$$

erhalten, während

$$p = \frac{k-x}{1-xx} \qquad \text{und} \qquad q = \frac{-k-x}{1-xx}$$

wird, sodass

$$y = \frac{\Delta(k+x) + (k-x)\mathrm{e}^{2k\omega}}{(1-xx)(\mathrm{e}^{2k\omega} - \Delta)}$$

ist. Hier wollen wir nun $\frac{m}{n}$ anstelle von Δ schreiben und mit $\mathrm{e}^{-k\omega}$ erweitern, und es wird

$$y = \frac{m\mathrm{e}^{-k\omega}(k+x) + n(k-x)\mathrm{e}^{k\omega}}{(1-xx)(n\mathrm{e}^{k\omega} - m\mathrm{e}^{-k\omega})}$$

sein, welche Form leicht auf diese Fälle angewendet werden können wird, in denen $k = \sqrt{A+1}$ eine imaginäre Größe wird, welche Fällen wir hier nun mit aller Sorgfalt entwickeln wollen.

§14 Wir wollen also setzen, dass die Formel $\sqrt{A+1} = k$ imaginär ist, sodass $k = \alpha\sqrt{-1}$ ist und daher $A = -\alpha\alpha - 1$ und dann werden wir

$$\mathrm{e}^{\alpha\omega\sqrt{-1}} = \cos\alpha\omega + \sqrt{-1}\sin\alpha\omega \quad \text{und} \quad \mathrm{e}^{-\alpha\omega\sqrt{-1}} = \cos\alpha\omega - \sqrt{-1}\sin\alpha\omega$$

haben, nach Einsetzen welcher Werte

$$y = \frac{m(\cos\alpha\omega - \sqrt{-1}\sin\alpha\omega)(x+\alpha\sqrt{-1}) - n(\cos\alpha\omega + \sqrt{-1}\sin\alpha\omega)(x-\alpha\sqrt{-1})}{(1-xx)(n\cos\alpha\omega + n\sqrt{-1}\sin\alpha\omega - m\cos\alpha\omega + m\sqrt{-1}\sin\alpha\omega)}$$

werden wird.

§15 Hier müssen nun die Konstante m und n so angenommen werden, dass zumindest der Nenner reell wird, was passieren wird, indem man $m = \lambda + \mu\sqrt{-1}$ und $n = -\lambda + \mu\sqrt{-1}$ setzt, sodass $m + n = 2\mu\sqrt{-1}$ und $m - n = 2\lambda$ wird. Auf diese Weise wird der Nenner nämlich $-2(1-xx)(\lambda\cos\alpha\omega + \mu\sin\alpha\omega)$ werden. Für das Entwickeln des Zählers bemerke man aber, dass

$$m(x+\alpha\sqrt{-1}) = \lambda x - \alpha\mu + (\lambda\alpha + \mu x)\sqrt{-1}$$

und

$$n(x-\alpha\sqrt{-1}) = -\lambda x + \alpha\mu + (\lambda\alpha + \mu x)\sqrt{-1}$$

sein wird und der Zähler selbst wird

$$2\cos\alpha\omega(\lambda x - \mu\alpha) + 2\sin\alpha\omega(\lambda\alpha + \mu x)$$

sein und auf diese Weise ist der ganze Ausdruck reell gemacht worden, es wird nämlich

$$y = \frac{-\cos\alpha\omega(\lambda x - \mu\alpha) - \sin\alpha\omega(\lambda\alpha + \mu x)}{(1-xx)(\lambda\cos\alpha\omega + \mu\sin\alpha\omega)},$$

welches als das vollständige Integral dieser Differentialgleichung

$$\mathrm{d}y + yy\mathrm{d}x = \frac{-(\alpha\alpha+1)\mathrm{d}x}{(1-xx)^2}.$$

ist.

§16 Wenn wir daher diesen Ausdruck so bestimmen wollten, dass er im Fall $x = 0$ verschwindet, weil wir ja

$$\omega = \int\frac{\mathrm{d}x}{1-xx} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

gesetzt haben, wird in diesem Fall auch $\omega = 0$. Und so wird $0 = \frac{\mu\alpha}{\lambda}$ sein müssen; daher ist klar, dass $\mu = 0$ gesetzt werden muss; und auf diese Weise wird das gewünschte Integral

$$y = \frac{-x\cos\alpha\omega - \alpha\sin\alpha\omega}{(1-xx)\cos\alpha\omega} \quad \text{oder} \quad y = \frac{-x - \alpha\tan\alpha\omega}{1-xx}$$

sein. Auf welche Weise aber dieser Ausdruck genügt, wird es der Mühe Wert sein zu untersuchen. Zu diesem Ziel muss vor allem bemerkt werden, dass wegen $\mathrm{d}\omega = \frac{\mathrm{d}x}{1-xx}$

$$\mathrm{d}(\tan\alpha\omega) = \frac{\alpha\mathrm{d}x}{(1-xx)\cos^2\alpha\omega}$$

sein wird; dann ist aber

$$\mathrm{d}y = \frac{-\mathrm{d}x(1+xx) - \alpha\alpha\mathrm{d}x\sec^2\alpha\omega - 2\alpha x\mathrm{d}x\tan\alpha\omega}{(1-xx)^2}.$$

Weil daher

$$yy = \frac{xx + 2\alpha x\tan\alpha\omega + \alpha\alpha\tan^2\alpha\omega}{(1-xx)^2}$$

ist, wird

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + yy = \frac{-1-\alpha\alpha}{(1-xx)^2}$$

sein.

Allgemeine Integration der vorgelegten Gleichung

§17 Weil wird ja in der oben gegebenen Lösung $A = kk - bb + ac$ gesetzt haben, müssen zwei Fälle entwickelt werden, der eine, in dem $A > ac - bb$ ist, der andere, in dem $A < ac - bb$ ist. Für den ersten Fall wird $A = kk - bb + ac$ gesetzt werden können, wie wir es oben (§3) gemacht haben, während wir dann aber oben in §7

$$\int \frac{2k\mathrm{d}x}{a + 2bx + cxx} = s$$

gesetzt haben, wollen wir nun

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a + 2bx + cxx} = \omega$$

setzen, sodass $s = 2k\omega$ wird und das vollständige Integral, was wir in §13 so ausgedrückt gefunden haben

$$y = \frac{\Delta q - p e^{2k\omega}}{\Delta - e^{2k\omega}},$$

wird nun für $\Delta = \frac{m}{n}$ gesetzt in diese Form

$$y = \frac{mq\mathrm{e}^{-k\omega} - np\mathrm{e}^{+k\omega}}{m\mathrm{e}^{-k\omega} - n\mathrm{e}^{+k\omega}}$$

verwandelt werden, während

$$p = \frac{b+k+cx}{a+2bx+cxx} \quad \text{und} \quad q = \frac{b-k+cx}{a+2bx+cxx}$$

wird, wo die beliebige Konstante in den Buchstaben m und n enthalten ist. Und auf diese Weise ist der erste Fall genügt worden, in dem $A = kk - bb + ac$ ist.

§18 Wir wollen nun den anderen Fall angehen, in dem $A < ac - bb$ ist, und wollen deshalb $A = ac - bb - \alpha\alpha$ setzen, welcher Fall aus dem vorhergehenden entsteht, indem man $k = \alpha\sqrt{-1}$ setzt. Vorher haben wir aber gesehen, dass

$$\mathrm{e}^{\alpha\omega\sqrt{-1}} = \cos\alpha\omega + \sqrt{-1}\sin\alpha\omega \quad \text{und} \quad \mathrm{e}^{-\alpha\omega\sqrt{-1}} = \cos\alpha\omega - \sqrt{1-}\sin\alpha\omega$$

ist, woher der Nenner des vorhergehenden Bruches

$$m(\cos\alpha\omega - \sqrt{-1}\sin\alpha\omega) - n(\cos\alpha\omega + \sqrt{-1}\sin\alpha\omega)$$

werden wird und nun wollen wir die Konstanten m und n so annehmen, dass der Nenner reell wird, was geschehen wird, indem man $m = \lambda + \mu\sqrt{-1}$ und $n = -\lambda + \mu\sqrt{-1}$ nimmt. So wird nämlich dieser Nenner diese reelle Form annehmen:

$$2\lambda\cos\alpha\omega + 2\mu\sin\alpha\omega.$$

§19 Für den Zähler werden wir aber nun

$$mq = \frac{\lambda(b+cx) + \mu\alpha + (\mu(b+cx) - \lambda\alpha)\sqrt{-1}}{a+2bx+cxx}$$

haben. Auf die gleiche Weise werden wir

$$np = \frac{-\lambda(b+cx) - \mu\alpha + (\mu(b+cx) - \lambda\alpha)\sqrt{-1}}{a+2bx+cxx}$$

finden. Wir wollen aber der Kürze wegen $mq = M + N\sqrt{-1}$ und $np = -M + N\sqrt{-1}$ setzen, sodass

$$M = \frac{\lambda(b+cx)+\mu\alpha}{a+2bx+cxx} \quad \text{und} \quad N = \frac{\mu(b+cx) - \lambda\alpha}{a+bx+cxx}$$

ist. Und auf diese Weise wird unser Zähler

$$(\cos\alpha\omega - \sqrt{-1}\sin\alpha\omega)(M + N\sqrt{-1}) + (\cos\alpha\omega + \sqrt{-1}\sin\alpha\omega)(M - N\sqrt{-1})$$
$$=(2M\cos\alpha\omega + 2N\sin\alpha\omega)$$

sein, sodass nun auch der Zähler eine reelle Form hat.

§20 Weil also unser vollständiges Integral

$$y = \frac{M\cos\alpha\omega + N\sin\alpha\omega}{\lambda\cos\alpha\omega + \mu\sin\alpha\omega}$$

ist, wird, wenn wir anstelle von M und N die angenommenen Werte wieder einsetzen, dieses Integral

$$y = \frac{\lambda(b+cx)\cos\alpha\omega + \mu\alpha\cos\alpha\omega + \mu(b+cx)\sin\alpha\omega - \lambda\alpha\sin\alpha\omega}{(a+2bx+cxx)(\lambda\cos\alpha\omega + \mu\sin\alpha\omega)}$$

werden, wo das Verhältnis zwischen den Größen λ und μ eine beliebige Konstante involviert. Wenn das Integral also für $x = 0$ genommen verschwinden muss, in welchem Fall auch das Integral

$$\omega = \int \frac{\mathrm{d}x}{a+2bx+cxx}$$

verschwinden wird, werden die Konstanten λ und μ so bestimmt werden, dass $0 = \frac{\lambda b + \mu a}{\lambda a}$ oder $\lambda = \alpha$ und $\mu = -b$ wird und auf diese Weise wird unser Integral

$$y = \frac{\alpha cx\cos\alpha\omega - \sin\alpha\omega(\alpha\alpha + bb + bcx)}{(a+2bx+cxx)(\alpha\cos\alpha\omega - b\sin\alpha\omega)}$$

sein.

§21 Nachdem diese Dinge nun erledigt worden sind, wollen wir diese doppelte Integration hier zum Ende hin auf einen Blick darstellen.

I. Das vollständige Integral dieser Gleichung

$$\mathrm{d}y + yy\mathrm{d}x = \frac{(ac - bb + kk)\mathrm{d}x}{(a+2bx+cxx)^2}$$

ist

$$y = \frac{m(b+cx-k)\mathrm{e}^{-k\omega} - n(b+cx+k)\mathrm{e}^{k\omega}}{(a+2bx+cxx)(m\mathrm{e}^{-k\omega} - n\mathrm{e}^{k\omega})},$$

wo die Buchstaben m und n unserem Belieben überlassen werden.

II. Das vollständige Integral dieser Gleichung

$$\mathrm{d}y + yy\mathrm{d}x = \frac{(ac - bb - \alpha\alpha)\mathrm{d}x}{(a + 2bx + cxx)^2}$$

ist

$$y = \frac{2(b + cx)\cos\alpha\omega + \mu\alpha\cos\alpha\omega + \mu(b + cx)\sin\alpha\omega - \lambda\alpha\sin\alpha\omega}{(a + 2bx + cxx)(\lambda\cos\alpha\omega + \mu\sin\alpha\omega)},$$

wo die Buchstaben λ und μ unserem Belieben überlassen sind. Für jeden der beiden Fälle drückt aber ω das Integral dieser Formel

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a + 2bx + cxx}$$

aus, welches zu verstehen ist so genommen zu werden, dass es für $x = 0$ gesetzt verschwindet.

§22 Aber die ganze Aufgabe ist tatsächlich noch nicht erledigt, sondern es ist noch ein einziger zu entwickelnder Fall übrig, indem entweder $k = 0$ oder $\alpha = 0$ ist und daher $A = ac - bb$, weil ja dieser Fall genau in die Mitte zwischen den zwei behandelten Fälle fällt, und aus keinem der beiden, außer durch weite Umwege, abgeleitet werden kann; um Vieles mehr wird es aber helfen, ihn aus den ersten Prinzipien abzuleiten, wo die beiden partikulären Integrale so aufgestellt worden sind, dass

$$p = \frac{b + cx + k}{a + 2bx + cxx} \quad \text{und} \quad q = \frac{b + cx - k}{a + 2bx + cxx}$$

war, woher

$$p - q = \frac{2k}{a + 2bx + cxx}$$

wird und für den gegenwärtigen Fall wird $k = 0$ gesetzt werden müssen.

§23 Wir wollen also k als eine sehr kleine Größe betrachten und wollen der Kürze wegen $p = q + 0$ setzen, dass

$$0 = \frac{2k}{a + 2bx + cxx}$$

ist; dann hat aber die erste Operation uns dieses Integral geliefert:

$$\ln\frac{y-p}{y-q}+\int(p-q)\mathrm{d}x=C,$$

was also nun

$$\ln\left(\frac{1-0}{y-q}\right)+\int\frac{2k\mathrm{d}x}{a+2bx+cxx}=2\Delta k$$

sein wird, welcher Ausdruck wegen

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{a+2bx+cxx}=\omega$$

in diese Form übergeht

$$\frac{-0}{y-q}+2k\omega=2\Delta k,$$

sodass nun

$$\frac{0}{y-q}=\frac{2k}{(y-q)(a+2bx+cxx)}=2k\omega-2\Delta k=2k(\omega-\Delta)$$

ist und daher wird

$$y-q=\frac{1}{(\omega-\Delta)(a+2bx+cxx)};$$

als logische Konsequenz wird nach Einsetzen des Wertes anstelle von q

$$y=\frac{b+cx}{a+2bx+cxx}+\frac{1}{(\omega-\Delta)(a+2bx+cxx)}$$

hervorgehen oder

$$y=\frac{(b+cx)(\omega-\Delta)+1}{(\omega-\Delta)(a+2bx+cxx)},$$

welches das vollständige Integral dieses gewünschten Falles ist, welches also weder Exponentialgrößen noch Kreisgrößen involviert.